Algebra elementare

Calcolo simbolico, termini ed equazioni equivalenti

0. Introduzione

In più occasioni abbiamo fatto uso di formule per rappresentare relazioni tra grandezze di vario genere e le abbiamo manipolate. In questa scheda cercheremo di generalizzare i procedimenti impiegati.

1. Il simbolo "="

Il simbolo "=" e le equazioni vengono usate in molti contesti. Gli attribuiamo sempre lo stesso significato? Consideriamo alcuni esempi.

Esempio (**A**). Usiamo l'espressione 3+2=5 per indicare che "3 più 2 fa 5". Per indicare che "5 è scomponibile negli addendi 3 e 2" usiamo invece di preferenza l'espressione 5=3+2. In realtà le due *equazioni* affermano entrambe che i termini 3+2 e 5 hanno lo stesso valore. Tuttavia, nell'uso comune, "=" viene spesso interpretato come "*può essere sostituito con*":

3+2=5 viene inteso come: 3+2 può essere sostituito con 5,

5=3+2 viene inteso come: 5 può essere sostituito con 3+2.

Esempio (**B**). Per calcolare 3+2 con una CT battiamo: 3 **+** 2 e poi clicchiamo **=**. Qui "=" rappresenta il comando (per la CT) di eseguire il calcolo impostato e visualizzarne il risultato.

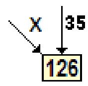
1 Tizio per descrivere le operazioni che via via esegue per calcolare (3+2)·4 "a mano" scrive: 3 + 2 = 5 · 4 = 20. Spiega perché ha sbagliato e indica uno o più modi in cui avrebbe potuto descrivere correttamente il procedimento di calcolo.

Esempio (**C**). Abbiamo incontrato l'uso di "=" con un ulteriore significato. Ad esempio quando si dice "poni N = N+1" si intende "incrementa N di 1". In questi casi a volte si usa "N := N+1" o "N ← N+1".

Esempio (**D**). Quando *definiamo*: f(x) = 3x+1, usiamo "= …" per dire "*nel seguito sta per il termine* …"; cioè f(x) è una abbreviazione del termine 3x+1. Non ci dobbiamo porre il problema se il termine a sinistra equivale al termine a destra: essi sono equivalenti "per definizione".

Esempio (**E**). Quando diciamo che la *proprietà* commutativa dell'addizione afferma che a+b=b+a intendiamo che i termini a+b e b+a sono equivalenti, cioè che *per ogni* coppia di numeri a e b il calcolo di a+b e quello di b+a danno luogo allo stesso valore, o, più in breve, che l'equazione a+b=b+a è vera.

Esempio (**F**). Nella scheda 4 di *Le statistiche*, indicato con x il numero sconosciuto degli studenti passati in una scuola dalla 1ª alla 2ª, abbiamo usato l'espressione x+35=126 per indicare il fatto che i 126 alunni della seconda comprendono 35 alunni ripetenti. Qui abbiamo usato "=" non per la descrizione di una proprietà matematica o per una definizione, ma per descrivere un *modello matematico* di una particolare situazione. Svolgendo i calcoli abbiamo trovato che l'equazione x+35=126 è vera se x è 91.



In (A), (E) e (F) il simbolo "=" corrisponde al concetto di *eguaglianza*: si afferma che 3+2 è eguale a 5, … , che x+35 è eguale a 126. È equivalente affermare che 5 è uguale a 3+2, …, che 126 è uguale a x+35.

Nel caso (B), invece, "=" indica un'*azione*: esegui il calcolo impostato. Nel caso (C) indica l'*azione*: calcola e metti nell'"oggetto" indicato a sinistra il valore indicato a destra.

Il caso (D) assomiglia al caso (C) (siamo di fronte alla descrizione di un comando: «sia: f(x)=3x+1») ma anche a (E): si può dire che f(x)=3x+1 è un'equazione che, qualunque valore si assegni a x, è vera *per definizione*.

La verità di 5=2+3 è invece frutto di una *dimostrazione* (calcolando trovo che effettivamente 3+2 fa 5).

In casi come (F) si intende che l'equazione deve essere vera *quando* le variabili considerate (la variabile x, in questo caso) abbiano il significato descritto (x sia il numero degli studenti …). Per fare un altro esempio, $A=a\cdot b$ è vera se con A si intende l'area (in m^2) di un rettangolo con lati consecutivi di misure a e b (in m), non è vera per ogni scelta di numeri da sostituire a a, b e A.

Accanto a equazioni sempre vere o vere solo per particolari valori assegnati alle variabili che vi compaiono, vi sono equazioni sempre false: 1+1=3, x=x+1 (qualunque numero si metta al posto di x il valore di x+1 è diverso dal numero x), …

2 Tra le seguenti equazioni, quali sono sempre vere, quali lo sono per qualche (ma non ogni) scelta di valori da assegnare alle variabili, quali sono sempre false? Motiva le risposte.

$a+b = a\,b$ $\qquad x^2 = 4$ $\qquad x+y = 0$ $\qquad u^2 + w^2 = -8$ $\qquad \sqrt{x} + x = -100$ $\qquad 2x - x = x$

Nota. Nell'equazione a+b = a b non è stato evidenziato il simbolo di moltiplicazione tra le variabili del termine destro ma al suo posto si è lasciato un piccolo spazio bianco. Nell'usuale linguaggio matematico spesso si usa questa convenzione, ma non sempre. Ecco, ad es., alcuni modi per indicare la formula che lega il costo totale al costo unitario:

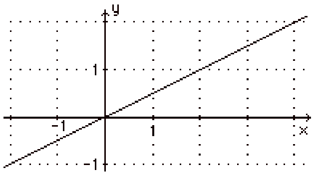
costo = (numero dei pezzi)·(costo unitario) $\qquad$ *c = np cu* $\qquad$ *c = np·cu*

Costo = NumeroPezzi·CostoUnitario $\qquad$ *c = (np)(cu)*

In genere quando si scrivono *a* e *A* si intendono due variabili differenti, come in *A* = *a*·*b*, ma in alcune applicazioni due nomi di variabile che differiscano solo per la dimensione (maiuscolo/minuscolo) di qualche carattere vengono considerati equivalenti. In JavaScript, invece, caratteri diversi per dimensione sono differenti. Ricordiamo, inoltre, che nei linguaggi di programmazione e in molte applicazioni bisogna sempre esplicitare il simbolo di moltiplicazione (*).

Una relazione tra numeri o altre grandezze espressa mediante un'equazione spesso può essere rappresentata efficacemente anche utilizzando *altri* "*linguaggi*".

3 Completa i riquadri seguenti:

	al posto di	INCASSO = ... + ...
3 $\xrightarrow{+\ \dots}$ …	al posto di	3 + 2 = 5
	al posto di	y = ...
parte sta a .... come .... sta a	al posto di	$\frac{parte}{totale} = \frac{percentuale}{100}$

2. Calcolo simbolico - Termini equivalenti

La manipolazione di un termine o di un'equazione per *riscriverla* in una forma equivalente (ad esempio la riscrittura di un termine per poi poterlo calcolare più facilmente con una CT o a mente, la riscrittura di un'equazione che si vuole risolvere rispetto a una certa variabile, …) viene chiamata ***calcolo simbolico*** per distinguerla dal *calcolo numerico,* con cui si ottiene un nuovo valore numerico a partire da altri valori numerici:
$3 \cdot 2 \to 6$ è un calcolo numerico, $3 \cdot 2 \to 2 \cdot 3$ e $x \cdot a \cdot x \to a \cdot x^2$ sono calcoli simbolici.

A volte invece che di calcoli simbolici si parla di *calcoli letterali* (con riferimento al fatto che oltre che su numeri si opera anche su espressioni che contengono lettere e nomi) o di *calcoli algebrici*. Quest'ultima dizione deriva dalla parola ***algebra***, con cui si intende quella parte della matematica che si occupa dello studio delle proprietà delle operazioni e delle formule (equazioni, disequazioni, …), oltre che di altri argomenti, a cui accenneremo successivamente.

Man mano, nel corso dello studio della matematica, incontreremo svariate tecniche di calcolo simbolico. Abbiamo già incontrato e usato, più o meno esplicitamente, varie tecniche.

In *Le Statistiche - 4* (→) abbiamo visto ad es. come usare la proprietà del riordino della somma per trasformare 17+16+4+3 in 17+3+(16+4).

Come sai vale anche la proprietà del ***riordino del prodotto***:

il risultato di una moltiplicazione non viene modificato dalla commutazione dei suoi due termini (vedi *figura 1-A*: per contare i quadretti posso sia fare 4 volte 6 che fare 6 volte 4)

e, più in generale (vedi *figura 1-B*: per contare i cubetti posso sia sommare 5 strati di $7 \cdot 3$ cubetti che sommare 7 strati di $3 \cdot 5$ cubetti):

*due termini ottenuti entrambi applicando ripetutamente la **moltiplicazione** a partire dagli stessi sottotermini* t1, t2, …, tn *sono **termini equivalenti**.*

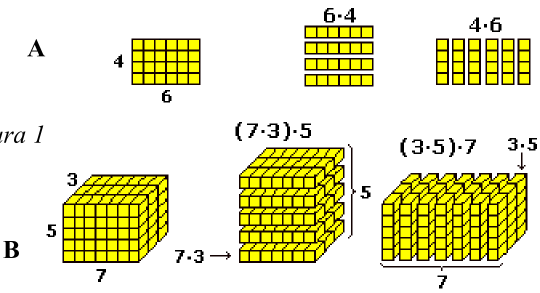


figura 1

4 Calcola mentalmente $2 \cdot 6 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 3$ nel modo che ritieni più conveniente e scrivi il termine che corrisponde al procedimento che hai impiegato.

5 Per calcolare $17+29+13 \cdot 118$ si può considerare il termine equivalente $13 \cdot 118+17+29$. Perché? È la proprietà del riordino della somma o quella del prodotto a garantire questa equivalenza?

Hai visto che per calcolare $17+29+13 \cdot 118$ si può considerare $13 \cdot 118+17+29$. Per precisare in che modo abbiamo riordinato la somma possiamo dire che abbiamo applicato la ***regola di riscrittura*** ***a+b+c*** → ***c+a+b***.
La direzione della freccia indica il verso in cui viene effettuata la *sostituzione*.

Considera il calcolo a lato.
(questa espressione non indica solo delle uguaglianze ma anche il verso in cui sono eseguiti i calcoli, come se ci fosse "→" al posto di "=")

$$\frac{17+16+3}{2} = \frac{17+3+16}{2} = \frac{20+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Prima di fare dei calcoli numerici ho riordinato il primo termine della divisione, cioè ho *rimpiazzato* il ***sottotermine*** 17+16+3 con il sottotermine equivalente 17+3+16. Ho applicato la regola di riscrittura ***a+b+c*** → ***a+c+b*** al primo termine della divisione.

Nota. Stiamo usando la parola "***regola***" non nel senso di "modo di comportarsi a cui occorre attenersi", cioè di norma, precetto, ... obbligatorio (o consigliato), ma nel senso, un po' diverso, di descrizione sintetica di un procedimento meccanico. Cioè non tanto come in «è contro le *regole* del calcio prendere la palla con le mani» quanto come in «nella maggior parte dei casi per formare il plurale dei nomi che finiscono in "e" puoi usare questa *regola*: …».

Abbiamo già usato la ***proprietà distributiva*** *della moltiplicazione rispetto alla addizione*. Possiamo quindi applicare le regole di riscrittura:

$$a\cdot(b+c+\ldots)\ \to\ a\cdot b+a\cdot c+\ldots \qquad\qquad (b+c+\ldots)\cdot a\ \to\ b\cdot a+c\cdot a+\ldots$$

per ***distribuire*** il *fattore moltiplicativo* ***a*** tra i termini di una sequenza di *addizioni*, cioè per ***portarlo dentro*** al sottotermine (b+c+…).

Ad es. per calcolare a mente 4·157 si può rimpiazzare 157 con 150+7 e poi distribuire "4·":

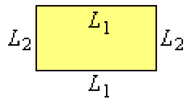
$$4\cdot157 = 4\cdot(150+7) = 4\cdot150 + 4\cdot7 = 600+28 = 628$$

Le equazioni che descrivono la proprietà distributiva lette "alla rovescia" danno luogo alle regole di riscrittura:

$$a\cdot b+a\cdot c+\ldots\ \to\ a\cdot(b+c+\ldots) \qquad\qquad b\cdot a+c\cdot a+\ldots\ \to\ (b+c+\ldots)\cdot a$$

che permettono di ***raccogliere*** *a fattor comune* o ***portare fuori*** dal termine $a\cdot b+a\cdot c+\ldots$ o dal termine $b\cdot a+c\cdot a+\ldots$ il fattore moltiplicativo ***a***.

Ad esempio se L_1 e L_2 sono le misure di due lati consecutivi di un rettangolo, per esprimere il perimetro P possiamo scrivere:



$$P = L_1+L_2+L_1+L_2 = L_1+L_1+(L_2+L_2) = 2\cdot L_1+2\cdot L_2 = 2(L_1+L_2)$$

dove abbiamo riordinato l'addizione, abbiamo operato due riscritture del tipo $a+a \to 2a$ ($L_1+L_1 \to 2L_1$, $L_2+L_2 \to 2L_2$) e, infine, abbiamo raccolto 2 a fattor comune.

$\boxed{6}$ Sotto, nella prima colonna, sono elencate alcune regole di riscrittura. Nella seconda colonna è indicato un termine con evidenziato in corsivo un sottotermine. Nella terza colonna scrivi come si trasforma il termine dopo la applicazione della regola al sottotermine evidenziato. Nella quarta indica quale descrizione verbale fra quelle elencate si addice meglio alla regola.

$a-b \to a+-b$	$95-7+15-3$		
$\frac{a}{b} \to a\cdot\frac{1}{b}$	$\frac{17}{0.25}\cdot16$		
$a(-b) \to -(ab)$	$3\cdot(-5\cdot7)+8$		
$a+-b \to a-b$	$(x+-\frac{y}{z})\cdot3$		
$b(a+c) \to ba+bc$	$1-3\cdot(1+2)-5$		

(1) trasformare un prodotto in somma

(2) trasformare una divisione in prodotto

(3) trasformare una differenza in somma

(4) trasformare una somma in differenza

(5) portar fuori la negazione da un prodotto

$\boxed{7}$ Riportiamo alcuni errori di calcolo simbolico (trasformazione di termini in termini) fatti da alunni di scuola secondaria superiore; in alcuni casi, per chiarezza o brevità, descriviamo con una regola di riscrittura il procedimento che intendevano applicare.

(A) x+yz = y+xz applicando a x+y la regola di riscrittura **a+b → b+a**.
- Dimostra con un esempio che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(B) 2a + 2b(x+y) = 2(a+b)(x+y) raccogliendo 2 a fattor comune.
- Dimostra con un esempio che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(C) $x-(-x) = x\,x = x^2$ eliminando a 2 a 2 le negazioni, cioè applicando la regola $-(-a) \to a$ a $-(-x)$.
- Opera la sostituzione $x = -1$, verifica che i termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(D) $\frac{10+x}{5x} = \frac{2+x}{x}$ applicando $\frac{c\cdot a}{c\cdot b} \to \frac{a}{b}$,
cioè eliminando il fattore 5 comune ai due termini della divisione
- Dimostra con un esempio numerico che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(E) 1 / x / x = 1/1 = 1 applicando $a/a \to 1$.
- Verifica con CT che 1 / x / x in genere non vale 1 e spiega qual è l'errore.

$\boxed{8}$ Riportiamo altri errori.

(F) x – (x – 3) = –3
- Spiega qual è l'errore dopo aver svolto correttamente il calcolo (trasformando la differenza in somma e poi distribuendo la negazione)

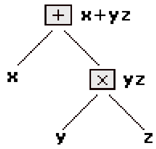
(G) –(ab) = (–a)(–b) (con l'intenzione di distribuire la negazione)
- Dimostra con un esempio che i due termini non sono equivalenti e spiega qual è l'errore.

(H) *Guadagno* = *Incasso* – $Spesa_1$ + $Spesa_2$ ottenuta da: *Guadagno* = *Incasso* – *Spese* con la sostituzione: *Spese* = $Spesa_1$ + $Spesa_2$
- Spiega qual è l'errore.

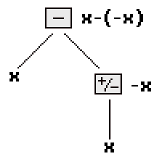
Non è difficile capire né ricordare le proprietà che si utilizzano per manipolare i termini. Basta un minimo di riflessione o qualche esempio numerico per vedere quando una regola di riscrittura trasforma un termine in uno equivalente. La difficoltà sta nell'individuare, man mano, quale regola di riscrittura applicare e nell'applicarla nel modo giusto, come hanno messo in luce gli esercizi precedenti.

Gli ***errori*** esaminati in questi esercizi possono essere raggruppati in tre classi:

(1) Casi in cui non si presta attenzione alla struttura del termine e *si applica una regola di riscrittura a una espressione che non è un sottotermine*.



- Ad es. nel caso *A* del ques. 7 non si è tenuto conto che x+y non è un sottotermine di x+yz; infatti x+yz, esplicitando tutti i simboli di operazione e delimitando i sottotermini con parentesi, assume la forma: x+(y·z); il grafo ad albero a fianco visualizza la struttura di x+yz. E così: in *B* 2a+2b non è un sottotermine; in *E* x/x non è un sottotermine, infatti 1/x/x sta per (1/x)/x.



- Nel caso *C* si è interpretato –(–x) come sottotermine di x–(–x) mentre, in questo caso, il primo "–" rappresenta la "sottrazione", non una "negazione", per cui –(–x) non è un sottotermine (nella regola –(–**a**) → **a** entrambi i "–" sono invece simboli di negazione); vedi il grafo ad albero a fianco.
- Nel caso *D* si voleva semplificare il termine dividendo per 5 i due termini della divisione, ma si è preso come primo termine 10 invece che tutto 10+x.

(2) Casi in cui si applica una regola di riscrittura *dimenticando di introdurre, quando è necessario, delle parentesi per delimitare il sottotermine* a cui si applica la regola.

- Nell'esempio *H* si è trasformato *Guadagno* = *Incasso* – *Spese* mettendo brutalmente $Spesa_1 + Spesa_2$ al posto di *Spese*: *Guadagno* = *Incasso* – $Spesa_1 + Spesa_2$. Se non si introduce una coppia di parentesi il secondo termine della sottrazione diventa $Spesa_1$ invece di $Spesa_1 + Spesa_2$; cioè occorre scrivere:

$$Guadagno = Incasso - (Spesa_1 + Spesa_2).$$

- Anche nell'esempio *F* si è fatto un errore simile: si è pensato, giustamente, di modificare x–(x–3) trasformando le sottrazioni in addizioni dell'opposto, ma, invece di fare l'opposto di tutto x–3, si è fatto solo quello di x. Cioè si è ragionato seguendo mentalmente questo procedimento:

$$x - (x - 3) \;=\; x + -x - 3 \;=\; x + -x + -3 \;=\; 0 + -3 \;=\; -3$$

invece che nel seguente modo, corretto: $x - (x - 3) \;=\; x + -(x + -3) \;=\; x + -x + --3 \;=\; 0 + 3 \;=\; 3$

(3) Nel caso *G* invece si è *inventata una regola in "analogia"* con altre, senza preoccuparsi se corrisponde a qualche proprietà vera: si è inventata la distributività della negazione rispetto alla moltiplicazione, che invece vale solo rispetto all'addizione.

9 Esamina le seguenti manipolazioni di termini e cerca di individuare e correggere gli eventuali errori.

(I) (3x+3)(x–1–x+1)+4 → $(3x+3)(\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x}+\cancel{1})+4$ → 3x+3+4 ("cancellando")

(L) $\dfrac{x+k\,x}{x} \to \dfrac{\cancel{x}+k\,\cancel{x}}{\cancel{x}} \to k$ ("eliminando il fattor comune")

(M) $3xy+y+9y^2 \to (3x+9y)y$ ("portando fuori il fattor comune")

(4) In questo esercizio abbiamo visto un'altra categoria di ***errori***. Anche queste sono situazioni in cui non si presta attenzione alle *proprietà* degli oggetti matematici rappresentati dalle espressioni manipolate; in questi casi la disattenzione è dovuta all'uso di *espressioni verbali* come "cancello", "porto fuori", "semplifico", … senza tener conto delle diversità di significato rispetto al linguaggio comune.

Nel primi due calcoli si sono usate le espressioni "cancello" e "elimino" nel significato corrente: in *I* si è fatto x–x → "niente" e 1–1 → "niente", mentre si sarebbe dovuta applicare la regola ***a–a*** → 0; in *L* si è fatto x/x → "niente", mentre si sarebbe dovuta applicare la regola ***a*/*a*** → 1.

In *M* si è usato "porto fuori y" come nel linguaggio comune, senza tener conto che si tratta di una espressione usata *convenzionalmente* per indicare l'applicazione di ***ad+bd+cd* → (*a+b+c*)*d*** e che quindi occorre pensare $3xy+y+9y^2$ come $3xy+1\cdot y+9y^2$, usando ***a* → 1·*a***.

Ogni volta che si fa un passo durante la trasformazione di un termine può essere utile, soprattutto per i primi tempi, provare a esplicitare (a parole e con una regola di riscrittura) il procedimento che si è impiegato. Questo aiuta a controllare se sono presenti errori. Si rallenta un po' *la velocità di calcolo*, ma questa *non è la cosa più importante*: l'importante è non commettere errori.

Come già osservato, in caso di incertezza (nel trovare il procedimento da usare o nel controllo della regola scelta o della sua applicazione) può essere utile fare esempi numerici o pensare a qualche situazione d'uso, di tipo geometrico-fisico o di altro genere.

Del resto, ai nostri giorni, anche i calcoli simbolici vengono svolti utilizzando opportuni programmi al calcolatore. Ciò che occorre è scrivere i termini correttamente (cioè seguendo il linguaggio – convenzioni, simboli, … – utilizzato dal programma che si impiega) e dare man mano i comandi giusti per effettuare le trasformazioni che ci interessano. E per entrambe queste cose occorre *avere chiara la struttura del termine* su cui si opera e *saper individuare le regole di riscrittura* che si vogliono applicare.

Nel paragrafo di esercizi sono presenti altre riflessioni sulla riscrittura dei termini, altre saranno affrontate in schede di lavoro successive.

3. *Equazioni equivalenti*

I procedimenti per riscrivere termini sono spesso impiegati per trasformare formule.

Ad esempio per trasformare 181 = x + 127 nella forma x = … abbiamo fatto:

$$181 = x + 127 \iff 181 - 127 = x + 127 - 127 \iff 54 = x \iff x = 54$$

Il simbolo "$\iff$" serve per indicare che la formula alla sua sinistra è equivalente a quella alla sua destra. È una "sintesi" dei simboli "$\Rightarrow$" e "$\Leftarrow$" usati, rispettivamente, nel significato di "implica" ("A implica B": se l'equazione A è vera allora è vera anche l'equazione B) e "segue da" ("A segue da B": se l'equazione B è vera allora è vera anche l'equazione A).

Nel primo "passaggio" abbiamo applicato a entrambi i termini dell'equazione l'operazione inversa di "+127", cioè "–127", in modo da isolare la x. Nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato primo e secondo membro, sfruttando la "simmetria" dell'eguaglianza (***a*=*b*** equivale a ***b*=*a***).

In generale, per trasformare un'equazione, si utilizzano, oltre all'eventuale scambio dei due membri, procedimenti di questo genere:

applicare a entrambi i membri una stessa funzione

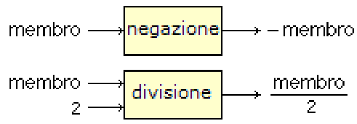
Vediamo qualche altro esempio:

(1) negazione $-x = 42 \iff --x = -42 \iff x = -42$

(2) reciproco $1/x = 8 \iff (1/x)^{-1} = 8^{-1} \iff x = 1/8$ [= 0.125]

(3) radice quadrata $A = L^2 \iff \sqrt{A} = \sqrt{(L^2)} \iff \sqrt{A} = L \iff L = \sqrt{A}$ *[vedi nota]*

(4) divisione $2x = 15 \iff 2x/2 = 15/2 \iff x = 15/2$ [= 7.5]



Nei casi (1), (2) e (3) abbiamo applicato a entrambi i membri una funzione a 1 input.

Nel caso (4) abbiamo applicato la funzione "/2", cioè, ad essere più precisi, abbiamo applicato sia a sinistra che a destra di "=" la funzione "/" (che è a due input), prendendo come primo input ciascun membro dell'equazione, come secondo input lo stesso termine 2, in modo da garantire l'eguaglianza delle uscite.

Analogamente, nell'esempio iniziale (181 = x+127), avevamo applicato "–127", cioè la sottrazione prendendo come primo input i membri dell'equazione e come secondo input 127.

Nota

Il caso (3) rappresenta l'equivalenza tra la formula che esprime l'area di un quadrato in funzione della misura del lato e la formula inversa che esprime il lato in funzione dell'area. Se con A e L avessimo inteso rappresentare numeri qualunque l'equivalenza corretta sarebbe stata:

$$(A = L^2 \ \ e \ \ 0 \le L) \iff \sqrt{A} = L$$

in quanto la sostituzione di $\sqrt{(L^2)}$ con L produce un termine equivalente solo se L non è negativo: $\sqrt{((-4)^2)} = \sqrt{(4^2)} = 4 \ne -4$.

S = Spesa P = Prezzo Unitario
N = Numero Pezzi Acquistati
$S = P \cdot N \iff P = S/N$

Analogamente l'equivalenza a fianco vale solo se N≠0. In altre parole S=P·N è impiegabile anche nel caso in cui non acquisto nulla: S=P·0=0 (se non compro nulla non spendo nulla), P=S/N no (la divisione per 0 non è definita). Dovremmo quindi scrivere:

$$(S = P \cdot N \ \ e \ \ N \ne 0) \iff P = \frac{S}{N}$$

Su problemi di questo genere torneremo in seguito, man mano che li incontreremo.

4. Equivalenza algebrica e altri tipi di equivalenza

Di fronte a due termini equivalenti una CT fornisce sempre lo stesso risultato?

10 $a + b - c$ si può riscrivere come $a - c + b$ $(a + b - c \to a + b + -c \to a + -c + b \to a - c + b)$.
Calcola 123456789012+1/95-123456789012 e 123456789012-123456789012+1/95 con la nostra "piccola CT" e confronta i due risultati ottenuti.

11 $a / b \cdot c$ può essere riscritto come $a \cdot c / b$ $\left(\frac{a}{b} \cdot c \to a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \to a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \to \frac{a\,c}{b}\right)$
Calcola 1/987654321*987654321-1 e 1*987654321/987654321-1 con la nostra "piccola CT" e confronta i due risultati ottenuti.

I quesiti mostrano che non sempre due termini equivalenti, anche quando la CT li esegue nel giusto ordine, danno luogo allo stesso risultato. Rivediamo il primo quesito.
Se eseguo 123456789012-123456789012 ottengo 0 e se poi aggiungo 1/95 ho 0.010526315789473684, il corretto arrtondamento del risultato.
Invece se eseguo 123456789012+1/95 ottengo 123456789012.01053. La CT è riuscita a memorizzare solo l'approssimazione di una piccola parte del risultato esatto 123456789012.01052631578947368…. Se poi sottraggo 123456789012 ottengo 0.01053, anzi viene visualizzato 0.01052*8564453125*, in quanto in realtà i calcoli vengono fatti in base 2.

Potrei osservare la cosa anche usando la "grande CT":

[123456789012+1/95-123456789012] **[–]** [123456789012-123456789012+1/95]
0.000002248663651316027

Concludendo possiamo osservare che l'***equivalenza tra termini*** può essere considerata da punti di vista diversi.

Dal punto di vista del ***tempo di calcolo*** con una CT, 357+69 e 69+357 sono equivalenti in quanto per calcolarli devo battere esattamente gli stessi tasti.

Invece –69+357 e 357–69 non lo sono: nel primo caso devo battere un tasto in più. Per fare un altro esempio, nel caso eseguissi i calcoli a mano, 7·254 è più dispendioso di 254·7 (*vedi* l'illustrazione a fianco).

```
 254 x       7 x
   7 =     254 =
------    ------
1778        28 +
           350 +
          1400 =
          ------
          1778
```

Nel quesito 10 e 11 abbiamo visto due termini non equivalenti dal punto di vista della ***precisione del calcolo*** se si opera con una CT: a seconda del termine che considero posso conoscere il risultato con diverse quantità di cifre attendibili.

Dal punto di vista "teorico" in tutti i casi sopra considerati avevamo di fronte termini equivalenti. Per distinguere questa equivalenza teorica dalle equivalenze più "operative" di cui abbiamo appena discusso possiamo parlare di ***termini algebricamente equivalenti***. Quindi diremo che *a+b-c* è algebricamente equivalente a *a-c+b* (cioè è equivalente dal punto di vista del calcolo simbolico) anche se può non esserlo dal punto di vista del calcolo numerico.

5. Esercizi

e1 Tra le seguenti equazioni, quali, fissata **u** e presa **w** come incognita, hanno un'unica soluzione? Quali hanno un'unica soluzione se si fissa **w** e si prende **u** come incognita?
[prima di fare calcoli simbolici, cerca di descrivere a parole il significato dell'equazione e prova a ragionare su degli esempi numerici; ad es. risolvere la prima equazione rispetto a **w** è un problema che può essere espresso con: «quali sono i numeri **w** che sommati a **u** danno 0?»]

$$u+w=0 \quad uw=1 \quad u^2=w \quad w=|u| \quad u^2=w^2 \quad u=0w$$

e2 Maria dice a Paolo: «Pensa un numero intero, raddoppialo, aggiungi 25, moltiplica per 2, aggiungi 10, dividi per 4. Dimmi che cosa ottieni e io *indovinerò* quale numero hai pensato».

(*1*) Maria non è una maga: semplicemente toglie 15 al numero finale ottenuto da Paolo. *Verificate* con qualche prova che il "trucco" funziona.

(*2*) Proviamo a ***dimostrare*** che il trucco funziona *in **ogni** caso*, cioè che qualunque sia il numero x pensato, togliendo 15 al numero ottenuto alla fine si riottiene x.

Il calcolo man mano eseguito da Paolo può essere così descritto:

$$x \quad 2x \quad 2x+25 \quad 2(2x+25) \quad 2(2x+25)+10 \quad \frac{2(2x+25)+10}{4}$$

Il termine finale è il numero ottenuto. Sottrai 15 e *verifica* che si ottiene effettivamente x:

$$\frac{2(2x+25)+10}{4} - 15 = \frac{\ldots \quad +10}{4} - 15 = \frac{4x+60}{4} - 15 = \frac{\ldots}{\ldots} + \frac{\ldots}{\ldots} - 15 = \ldots$$

(*3*) Vediamo come è stato "inventato" questo gioco. Indicando con Q il numero finale si è descritto il problema sotto forma di equazione e si è ricavata x in funzione di Q. Cioè si è risolta rispetto all'incognita x l'equazione:

$$Q = \frac{2(2x+25)+10}{4}$$

Completa le seguenti trasformazioni:

$$Q = \frac{2(2x+25)+10}{4} \iff \ldots = 2(2x+25)+10 \iff \ldots = 4x+50+10 \iff$$

$$\ldots - 60 = \ldots \iff \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = x \iff \ldots\ldots = x$$

(*4*) *Inventa* una nuova versione di questo gioco.

e3 La visione di un film in un Cineclub costa 5 € ai soci e 6 € ai non-soci. La tessera annuale costa 10€. In quali casi conviene farsi soci?
Per rispondere risolvi prima la seguente equazione rispetto a N: 10+5N = 6N

e4 Abbiamo che: $(ab)^3 \to (ab)(ab)(ab) \to (aaa)(bbb) \to a^3\, b^3$
Possiamo esprimere la trasformazione del termine iniziale nel termine finale dicendo che abbiamo portato l'elevamento a potenza dentro alla moltiplicazione o che abbiamo distribuito l'elevamento a potenza rispetto alla moltiplicazione.
Più in generale abbiamo la *regola di riscrittura*:

$$\boldsymbol{(ab)^c \;\to\; a^c\, b^c}$$

Ad esempio possiamo usare tale regola (con **c**=2) per calcolare velocemente 300^2:

$$300^2 = (3\cdot 100)^2 = 3^2\cdot 100^2 = 9\cdot 10\,000 = 90\,000$$

Si può dimostrare che tale regola dà luogo a termini equivalenti anche quando **c** non è un numero intero positivo. *Completa* i seguenti calcoli, specificando che cosa è **c**:

$$400^{-1} = (4\cdot 100)^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1/4\cdot 0.01 = 0.25\cdot 0.01 = 0.0025 \qquad c = ?$$

$$\sqrt{1600} = \sqrt{(16\cdot 100)} = (16\cdot 100)^{1/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sqrt{16}\cdot\sqrt{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad c = ?$$

Nota. Nell'applicare questa regola di riscrittura, analogamente a quanto si è visto a proposito delle regole per riscrivere le equazioni, occorre fare attenzione.
Ad es. non sempre si può distribuire la radice quadrata (cioè l'elevamento alla 1/2).
Nel caso a fianco, sopra, si otterrebbe la trasformazione in un termine che non è definito, mentre moltiplicando direttamente avremmo ottenuto:

$$\sqrt{(-9\cdot -4)} = \sqrt{-9}\cdot\sqrt{-4}$$

$$\sqrt{(-9\cdot -4)} = \sqrt{36} = 6$$

e5 A e B sono due grandezze legate dalla relazione a fianco, dove h e k sono dei valori fissati. L'equazione considerata esprime A in funzione di B. La formula inversa può essere ottenuta nel modo seguente:

$$A = hB + 2kB + B$$

$$A=hB+2kB+B \iff A=hB+2kB+1B \iff A=(h+2k+1)B \iff \frac{A}{h+2k+1}=B$$

dove, per applicare il raccoglimento a fattor comune, si è prima trasformato B in 1·B (→ commento al ques.9-M).

Sotto sono indicati per esteso i procedimenti usati da due alunni per trovare B in funzione di A nel caso della relazione a fianco.

$$A=hB+2kB-B$$

Completa le parti mancanti, *indica* quale dei due procedimenti è sbagliato e cerca di *capire* quale ragionamento ha seguito l'alunno che ha sbagliato.

(1) $A=hB+2kB-B \iff A=(h+2k-0)B \iff A=(....+....)B \iff$ .... $=B$

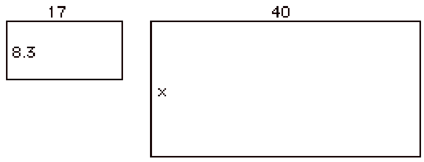
(2) $A=hB+2kB-B \iff A=hB+2kB+-B \iff A=hB+2kB+(-1)B \iff$
$A=(.... + ... + ...)B \iff A=(.... + ... - ....)B \iff$ .... $=B$

e8 *"Dividendo o moltiplicando i due termini di una frazione per uno stesso numero* (diverso da 0) *si ottiene una frazione equivalente*" è un modo in cui possono essere espresse verbalmente le regole:

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \to \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \to \frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

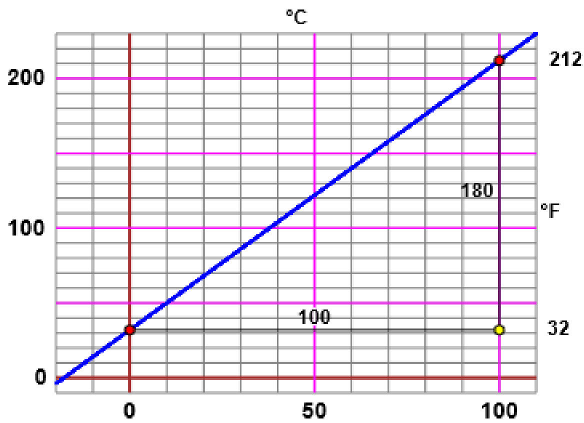
Calcola mentalmente la divisione 7526/5 e spiega a parole come hai proceduto.

e10 Un disegno che occupa un rettangolo lungo 17 cm e largo 8.3 cm deve essere ingrandito fino a occupare un rettangolo lungo 40 cm. Indicata con x la larghezza del nuovo rettangolo, scrivi un'equazione che traduca la frase «x sta a 40 come 8.3 sta a 17» e risolvila arrotondando il risultato ai millimetri.



e11 Abbiamo più volte rappresentato la relazione tra valore in °C e valore in °F di una temperatura sia sotto forma di grafico, sia sotto forma di equazione:

$$f = 32 + 1.8c$$



Effettua i cambi di unità di misura sotto indicati procedendo sia graficamente (scrivi nel primo "…" il valore che riesci a stimare col grafico) sia ricorrendo all'equazione (scrivi nel secondo "…" il valore che ottieni arrotondato ai decimi).

$c = 60$ $\quad f = ...$ $\quad f = 32+1.8c = ...$ $\qquad c = -12$ $\quad f = ...$ $\quad f = 32+1.8c = ...$

$f = 86$ $\quad c = ...$ $\quad c = \dfrac{f-32}{1.8} = ...$ $\qquad f = 60$ $\quad c = ...$ $\quad c = \dfrac{f-32}{1.8} = ...$

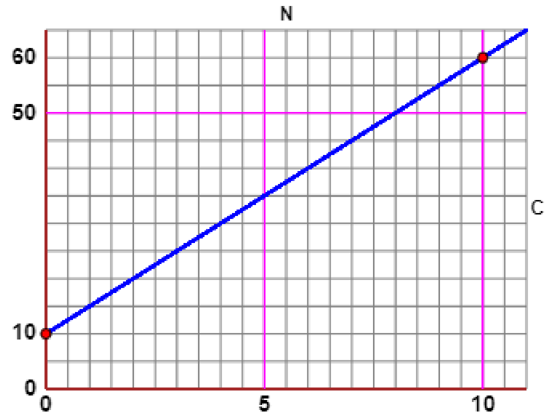
e12 Due cineclub praticano le seguenti tariffe: il primo, 10 € di tessera annuale più 5 € a film; il secondo, 20 € di tessera annuale più 3.5 € a film. Senza entrare nel merito dei film proiettati, indicato con N il numero di film all'anno che si vedranno, *stabilisci* per quali valori di N conviene l'iscrizione al primo club e per quali valori di N conviene l'iscrizione al secondo. Risolvi questo problema in due modi:

(1) Scrivi le equazioni che rappresentano il costo C annuale in funzione di N nei due casi (per il primo cineclub abbiamo già visto nel quesito e3 che C=10+5N);

(2) Risolvi rispetto a N l'equazione 10+5N = … (al posto di "…" metti il termine che rappresenta il costo in funzione di N nel caso del secondo club).

Oppure:

(2 bis) Traccia il grafico delle due equazioni C=10+5N e C=… e trova l'intersezione dei loro grafici (sotto è già tracciato il grafico della prima equazione: è la retta che passa per i punti (0,10) - punto che corrisponde alla situazione: 0 film, costo annuale di 10 € - e (10,60) - punto che corrisponde alla situazione: 10 film, costo annuale di 60 €).



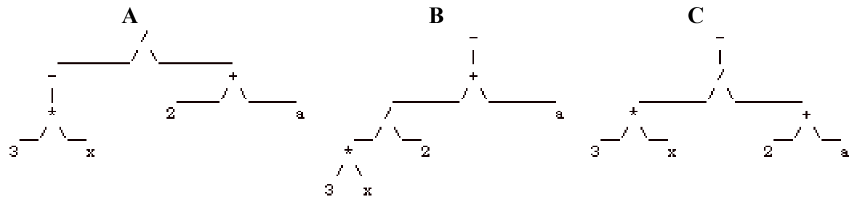
e13 (1) Senza fare disegni, stabilisci se si incontrano, e in che punto, le due rette che sono grafico delle funzioni x → 3x+4 e x → 2x+6.
(2) Come sopra, nel caso delle funzioni x → 7x+14 e x → 7x+15.

e14 "due meno il prodotto di A più B per sette" è una possibile descrizione verbale di 2–(A+B)·7. Prova a descrivere verbalmente:

$$3+\frac{A+B}{X+A}\cdot B \qquad 3+\frac{A+B}{X+A\cdot B}\cdot B \qquad \frac{3+A+B}{(X+A)\cdot B} \qquad -\frac{A}{Z} \qquad \frac{-A}{Z}$$

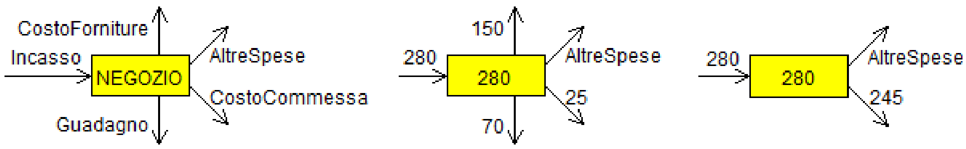
e15 Associa ad ognuno dei seguenti termini il **grafo ad albero** che lo rappresenta.

$$-\left(\frac{3\cdot x}{2}+a\right) \qquad -\frac{3\cdot x}{2+a} \qquad \frac{-3\cdot x}{2+a}$$



e16 «Un negoziante incassa in un anno 280 mila €, ne spende 25 per una commessa (stipendio+contributi) e 150 per pagare i fornitori, e guadagna 70 mila €. A quanto ammontano le altre spese (telefono, energia elettrica, tassa sui rifiuti, manutenzioni, …)?»
Questo problema può essere schematizzato sia con un'equazione che con un grafo:

Incasso = CostoCommessa + CostoForniture + AltreSpese + Guadagno



Per risolvere il problema appoggiandosi al grafo, si possono mettere a fianco delle frecce che rappresentano flussi di denaro conosciuti i relativi valori e si possono poi conglobare in un'unica freccia i valori in uscita che sono noti, arrivando al grafo sulla destra. Di qui si può ricavare che AltreSpese = 280-245=35 (mila €).

Risolvi il problema usando l'equazione (sostituisci prima alle variabili che rappresentano grandezze note i relativi valori, utilizzando come unità di misura le migliaia di euro).

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
riordinare un prodotto (§2), *portar fuori la negazione* (ques.6), *rimpiazzare un sottotermine* (dopo ques.5), *raccogliere a fattor comune* (prima di ques.6), *equivalenza dal punto di vista della precisione del calcolo* (fine §4).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 60 ordina Grafici